Leçon n° 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u son polynôme caractéristique, π_u son polynôme minimal, F sous-espace vectoriel de E de dimension p.

I/ Notion de sous-espace stable.

A/ Définitions et propriétés. [OBJ] [G]

Définition 1 : F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Exemple 2 : $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par u.

Exemple 3 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, u admet une droite ou un plan stable.

Exemple 4 : u est une homothétie si et seulement si u stabilise toute droite.

Proposition 5 : Si F est stable par u alors $u|_F \in \mathcal{L}(F)$.

Proposition 6 : Caractérisation matricielle des sous-espaces vectoriels stables.

Application 7 : χ_u est irréductible si et seulement si u n'admet pas de sous-espace stable non trivial.

Application 8 : Cayley-Hamilton.

B/ Production de sous-espaces stables. [OBJ] [ROM]

Remarque 9 : Trouver des sous-espaces stables permet de trouver des formes privilégiées pour les matrices.

Proposition 10 : Si u et v commutent alors $\text{Ker}(v)$ et $\text{Im}(v)$ sont stables par u.

Corollaire 11 : u et $P(u)$ commutent avec $P \in \mathbb{K}[X]$ et donc $\text{Ker}(P(u))$ est stable par u.

Corollaire 12 : Les sous-espaces propres sont stables par u.

Exemple 13 : Les sous-espaces caractéristiques sont stables par u.

Proposition 14 : F est stable par u si et seulement si F° est stable par ${}^t u$.

Proposition 15 : Lemme des noyaux.

II/ Diagonalisation et trigonalisation.

A/ Réduction d'un endomorphisme. [ROM]

Définition 16 : Trigonalisable.

Proposition 17 : u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.

Corollaire 18 : Si u est trigonalisable, F stable par u alors $u|_F$ est trigonalisable.

Définition 19 : Endomorphismes diagonalisables.

Proposition 20 : Caractérisations des endomorphismes diagonalisables.

Corollaire 21 : Si F est stable par u alors $u|_F$ est diagonalisable.

B/ Réduction d'une famille d'endomorphismes. [ROM]

Théorème 22 : Diagonalisation et trigonalisation simultané : Si u et v commutent et sont diagonalisables (resp. trigonalisables) alors u et v sont codiagonalisables (resp. cotrigonalisables).

Remarque 23 : La réciproque dans le cas diagonalisable est vraie mais pas dans le cas trigonalisable.

Application 24 : Si u et v commutent et sont diagonalisables alors $u+v$ est diagonalisable.

III/ Réductions en sous-espaces stables.

A/ Décomposition de Dunford. [ROM]

Théorème 25 : Décomposition de Dunford.

B/ Réduction de Jordan. [ROM]

Développement 1

Lemme 26 : $E_{f,x} = \mathrm{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.

Théorème 27 : Réduction de Jordan dans le cas nilpotent.

Corollaire 28 : Dans le cas général.

C/ Réduction de Frobenius. [G] [ROM]

Définition 29 : Endomorphismes cycliques.

Définition 30 : Matrice compagnon.

Proposition 31 : Si f est cyclique alors il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit une matrice compagnon.

Théorème 32 : Réduction de Frobenius.

Corollaire 33 : f et g sont semblables si et seulement si f et g ont les mêmes invariants de similitude.

D/ Réduction des endomorphismes normaux. [ROM]

Définition 34 : Endomorphismes normaux, symétriques, antisymétriques.

Développement 2

Théorème 35 : Réduction des endomorphismes normaux.

Corollaire 36 : Cas symétrique, antisymétrique et orthogonal.

Références :

— [G] Gourdon Algèbre p. 162 et p. 289
— [OBJ] Objectif Agrégation p. 157
— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 675-702, p. 743